【自然科学基础理论研究】

含有伪 Smarandache 函数的方程的求解问题

杨明顺

(渭南师范学院 数理学院,陕西 渭南 714099)

摘 要:利用初等方法及解析方法研究了两类包含伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的方程的可解性,证明了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 为 n 的原根当且仅当 $n = 2,3,4$。方程 $\sum_{k=1}^{n} Z(k) = \frac{n(n+1)}{2}$ 有且仅有两个正整数解。

关键词:伪 Smarandache 函数;原根;方程;正整数解

中图分类号:O156.4 文献标志码:A 文章编号:1009-5128(2017)08-0005-05

收稿日期:2016-12-17

基金项目:陕西省自然科学基金资助项目:Mock theta 函数理论及其交叉应用研究(2016JM1004);陕西省教育厅自然科学研究计划项目:Hurwitz-zeta 函数高阶导函数的新型均值计算及应用研究(16JK1265);渭南师范学院科研计划项目:数论函数及其在大数据处理方面的应用研究(15YKF005);渭南师范学院教育科学研究项目:协同创新下师范生职业技能的培养(2015JYKX016)

作者简介:杨明顺(1964—),男,陕西渭南人,渭南师范学院数理学院教授,主要从事数论研究。

DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2017.08.001

0 引言

定义 1 设 $m > 1$,$(a,m) = 1$,则使 $a^r \equiv 1 \pmod m$ 成立的最小的正整数 r 称为 a 对模 m 的指数,记为 $\delta_m(a)$。

定义 2 若 $\delta_m(a) = \varphi(m)$,则称 a 是模 m 的原根。

定义 3 对任意正整数 n,伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为满足 $n \left| \frac{m(m+1)}{2} \right.$ 的最小的正整数 m。即就是:$Z(n) = \min\left\{m: n \left| \frac{m(m+1)}{2} \right., m \in N^+\right\}$。其中,$N^+$ 表示所有正整数集合。

例如,$Z(n)$ 的前几个值分别为 $Z(1) = 1$,$Z(2) = 3$,$Z(3) = 2$,$Z(4) = 7$,$Z(5) = 4$,$Z(6) = 3$,该函数是由 David Gorski 在文献 [1] 中提出的,同时他本人还研究了 $Z(n)$ 的初等性质,获得了一系列有趣的结果。其中的一些重要性质如:(1) 如果 $p > 2$ 是一个素数,那么 $Z(p) = p - 1$;(2) 如果 $n = 2^k$,那么 $Z(n) = 2^{k+1} - 1$;(3) 设 $p > 2$ 为素数,那么 $Z(2p) = p$。其他有关伪 Smarandache 函数的工作可参阅文献 [2-4]。另外,Kenichiro Kashihara 还建议我们求方程 $\sum_{k=1}^{n} Z(k) = \frac{n(n+1)}{2}$ 的所有正整数解,寻找伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 为 n 的原根的所有正整数 n,本文利用初等方法及解析方法对这两类问题进行了研究,得到了 2 个有趣的结论。

1 引理及证明

引理 1[5] 设 $n > 1$ 为正整数,a 为任意整数且 $(a,n) = 1$,则 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$,其中:$\varphi(n)$ 为 Euler 函数,即 $\varphi(n)$ 表示不超过 n 且与 n 互素的正整数的个数。



引理 2[6]　对于任意正整数 n,有 $\sum_{k\leqslant n} Z(2k) \leqslant \frac{15n^2}{16} + \frac{9n}{2} + \frac{45}{4}$。

证明　以下分两种情况进行讨论:

(1) 当 $n = 2m$(m 为自然数) 为偶数时,有

$$\sum_{k\leqslant n} Z(2k) = \sum_{k\leqslant m} Z(2(2k-1)) + \sum_{k\leqslant m} Z(4k)。\tag{1}$$

注意到 $Z(2(2k-1)) \leqslant 2k-1$,如果 $2 \mid k$,则有 $Z(2(2k-1)) \leqslant 2k-2$; 如果 $2 \nmid k$,则有

$$\sum_{k\leqslant m} Z(2(2k-1)) \leqslant Z(2) + \sum_{1<k\leqslant m} (2k-1) = \frac{n^2}{4} + 2。\tag{2}$$

设 $u = \left[\frac{m+1}{2}\right]$ 表示不超过$\frac{m+1}{2}$的最大整数,则有

$$\sum_{k\leqslant m} Z(4k) \leqslant \sum_{k\leqslant u} Z(4(2k-1)) + \sum_{k\leqslant u} Z(8k)。\tag{3}$$

当 $2k-1 > 4$ 时,注意到: $Z(4(2k-1)) \leqslant 2k-2$。如果 $k \equiv 1(\bmod 4)$,则 $Z(4(2k-1)) \leqslant 2k-1$; 如果 $k \equiv 0(\bmod 4)$,则 $Z(4(2k-1)) \leqslant 3(2k-1)-1$; 如果 $k \equiv 2(\bmod 4)$,则 $Z(4(2k-1)) \leqslant 3(2k-1)$; 如果 $k \equiv 3(\bmod 4)$,则有

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant u} Z(4(2k-1)) &\leqslant Z(4) + Z(12) + \sum_{3\leqslant k\leqslant u} 3(2k-1)\\ &= 4 - 1 + \sum_{k\leqslant u} 3(2k-1) = 3(u^2+1) \leqslant 3 + \frac{3(m+1)^2}{4}。\end{aligned}\tag{4}$$

注意到 $Z(2n) \leqslant 4n-1$,因此

$$\sum_{k\leqslant u} Z(8k) \leqslant \sum_{k\leqslant u} (16-1) \leqslant 8u(u+1) - u \leqslant 2(m+1)^2 + \frac{7(m+1)}{2}。\tag{5}$$

由(3)(4)(5) 式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant m} Z(4k) &\leqslant \sum_{k\leqslant u} Z(4(2k-1)) + \sum_{k\leqslant u} Z(8k)\\ &\leqslant \frac{11n^2}{16} + \frac{9n}{2} + \frac{37}{4}。\end{aligned}\tag{6}$$

由(1)(2)(6) 式可得

$$\sum_{k\leqslant n} Z(2k) = \sum_{k\leqslant m} Z(2(2k-1)) + \sum_{k\leqslant m} Z(4k) \leqslant \frac{15n^2}{16} + \frac{9n}{2} + \frac{45}{4}。$$

于是,证明了当 n 为偶数时结论成立。

(2) 当 n 为奇数时,设 $n = 2m+1$(m 为自然数),利用 $Z(2(2m+1)) \leqslant 2m+1$ 及上面已经证明的结果有

$$\sum_{k\leqslant n} Z(2k) = \sum_{k\leqslant 2n+1} Z(2k) = Z(2(2m+1)) + \sum_{k\leqslant 2m} Z(2k) < \frac{15n^2}{16} + \frac{9n}{2} + \frac{45}{4}。$$

于是,完成了引理的证明。

引理 3[7]　若 p 为奇素数,则模 p 有原根。

证明　在模 p 的简化剩余系 $1,2,\cdots,p-1$ 里,每一整数对模 p 都有它自己的指数。从这 $p-1$ 个指数中取出所有不同的指数,记作 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$,令 $\tau = [\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r]$。

(1) 设 $\tau = q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_k^{\alpha_k}$ 为 τ 的标准分解式,则对每一 s 来说,在 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$ 里一定有一 δ 使得 $\delta = aq_s^{\alpha_s}$,由 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$ 的意义知有一整数,它对模 p 的指数是 δ。设这个整数为 x,由指数的性质可得 $x_s = x^{\alpha}$ 对模 p 的指数为 $q_s^{\alpha_s}$,故在 $1,2,\cdots,p-1$ 里有 k 个数 $x'_1,x'_2,\cdots,x'_k$ 使 $x'_s(s=1,2,\cdots,k)$ 对模 p 的指数是 $q_s^{\alpha_s}$。令 $g = x'_1x'_2\cdots x'_k$,由引理 1 可知 $g = x'_1x'_2\cdots x'_k$ 对模 p 的指数是 τ。

(2) 因为 $\delta_s(s=1,2,\cdots,r)$ 是 τ 的因数,而 $1,2,\cdots,p-1$ 中任一数的指数在 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$ 中出现,故 x^{τ}

$\equiv 1(\bmod p)$，$x = 1,2,\cdots,p-1$，即 $x^r \equiv 1(\bmod p)$ 至少有 $p-1$ 个解，从而 $p-1 \leqslant r$，但由指数的性质可知 $\delta_s \mid p-1\ (s=1,2,\cdots,r)$，故 $\tau \mid p-1$，由此可得 $\tau \leqslant p-1$，故 $\tau = p-1$。

引理 4　若 p 为奇素数，则模 p^α 有原根，其中 $\alpha \geqslant 1$ 为整数。

证明　不妨设 $\alpha > 1$。由于 g 是模 p 的原根，则 $(g,p)=1$，因此存在整数 x_0，使得 $g^{p-1} = 1 + px_0$，于是，对于任意的整数 t 有

$$(g+pt)^{p-1} = g^{p-1} + p(p-1)tg^{p-2} + \cdots = 1 + p(x_0 - g^{p-2}t) + p^2Q_2。$$

其中：$Q_2 \in \mathbf{Z}$。

从而 $(g+pt)^{p-1} \equiv 1 + p(x_0 - g^{p-2}t)(\bmod p^2)$，当 p 不能整除 x_0 时，取 $t_0 = 0$；当 p 能整除 x_0 时，取 $t_0 = 1$，故 p 不能整除 $x_0 - g^{p-2}t_0 = y_0$，于是

$$(g+pt_0)^{p-1} = 1 + py_0 \equiv 1(\bmod p^2),$$
$$(g+pt_0)^{p(p-1)} = (1+py_0)^p = 1 + p^2y_1。$$

其中：$y_1 = y_0 + C_P^2y_0^2 + \cdots + p^{p-2}y_0^p \equiv y_0(\bmod p)$。

因此，当 p 不能整除 y_1 时，同理可得

$$(g+pt_0)^{p^2(p-1)} = (1+p^2y_1)^p = 1 + p^3y_2,$$
$$(g+pt_0)^{p^3(p-1)} = (1+p^3y_1)^p = 1 + p^4y_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$(g+pt_0)^{p^{\alpha-1}(p-1)} = (1+p^{\alpha-1}y_1)^p = 1 + p^\alpha y_{\alpha-1}。$$

其中：$y_{\alpha-1} \equiv y_{\alpha-2} \equiv \cdots \equiv y_0(\bmod p)$，因此，$p$ 不能整除 $y_i(0 \leqslant i \leqslant \alpha-1)$。

设 $g+pt_0$ 对模 p^α 的指数为 δ，则 $(g+pt_0)^\delta \equiv 1(\bmod p^\alpha)$，由此即得 $(g+pt_0)^\delta \equiv 1(\bmod p)$，但 $g+pt_0$ 是模 p 的一个原根，故 $p-1$ 能整除 δ。另一方面，由 δ 的定义知 $\delta \mid \varphi(p^\alpha)$，即 $\delta \mid p^{\alpha-1}(p-1)$，故 $\delta = p^{r-1}(p-1)$，$1 \leqslant r \leqslant \alpha$，由此结果可得 $1 + p^ry_{r-1} \equiv 1(\bmod p^\alpha)$，即 $p^ry_{r-1} \equiv 1(\bmod p^\alpha)$，从而有 $r \geqslant \alpha$，故 $r = \alpha$，$g + pt_0$ 是模 p^α 的一个原根。

引理 5　关于模 $m(>1)$ 有原根的充要条件是 m 是形如 $2,4,p^k,2p^k$ 的数，其中：p 为奇素数，k 为正整数。

证明　(1) 必要性：

若 m 不具备定理中的形式，则

$$m = 2^k(k \geqslant 3), \tag{7}$$
$$m = 2^kp_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_l^{k_l},(k \geqslant 2,l \geqslant 1), \tag{8}$$
$$m = 2^kp_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_l^{k_l},(k \geqslant 0,l \geqslant 2), \tag{9}$$

其中：$p_i(1 \leqslant i \leqslant l)$ 为奇素数，$k_i(1 \leqslant i \leqslant l)$ 为正整数。

若 m 是形如(8)式的数，那么对任意 a，$(a,m)=1$，有

$$a^{\varphi(2^k)} \equiv 1(\bmod 2^k),$$
$$a^{\varphi(p_i^{k_i})} \equiv 1(\bmod p_i^{k_i}),1 \leqslant i \leqslant l,$$
$$a^{\lambda(m)} \equiv 1(\bmod 2^k),$$
$$a^{\lambda(m)} \equiv 1(\bmod p_i^{k_i}),1 \leqslant i \leqslant l,$$
$$a^{\lambda(m)} \equiv 1(\bmod m)。 \tag{10}$$

设正整数的标准分解式为 $m = 2^kp_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_l^{k_l}$，记 $\lambda(m) = [\varphi(2^k),\varphi(p_1^{k_1}),\cdots,\varphi(p_l^{k_l})]$，易证 $\lambda(m) < \varphi(m)$，由(10)式可知任何与 m 互素的数 a 都不是模 m 的原根。同理，若 m 为形如(7)或(9)式中的数，模 m 也没有原根。

(2) 充分性：

1) 若 $m = 2^n$。当 $n=1$ 时，$m=2$，此时 $\varphi(m)=1$，显然 1 是它的原根。当 $n=2$ 时，$m=4$，此时 $\varphi(m)$

$=2$，易知 1，3 是模 4 的简化剩余系，显然 3 是它的原根。当 $n\geqslant 3$ 时，对任意奇数 a，由于 $a=2a_1+1$，从而 $a^2=4a_1(a_1+1)+1\equiv 1(\bmod 2^3)$，则

$$a^{2^2}=(1+8t_1)^2=1+16(t_1+4t_1^2)\equiv 1(\bmod 2^4)。$$

若 $a^{2(n-1)-2}\equiv 1(\bmod 2^{n-1})$，则 $a^{2n-2}=(1+2^{n-1}t_{n-3})^2=1+2^n(t_{n-3}+2^{n-2}t_{n-3}^2)\equiv 1(\bmod 2^n)$，从而 $a^{2n-2}\equiv 1(\bmod 2^n)$，$(a,2^n)=1$ 永远成立，故模 $m=2^n$ 没有原根。

2）若 $m=p^k$。当 $k=1$ 时，$m=p$，此时 $\varphi(m)=p-1$，设 $p-1=q_1^{k_1}\cdots q_r^{k_r}$，如果我们能够找到关于模 p 的阶数是 $q_i^{k_i}$ 的数 $b_i(i=1,2,\cdots,r)$，由引理 2，$q=b_1b_2\cdots b_r$ 的阶数就是 $p-1$，即 q 是模 p 的原根。为此，考虑 $x^{\frac{p-1}{q_i}}\equiv 1(\bmod p)$，因为 p 为素数，所以，它的不同解的个数不大于 $\frac{p-1}{q_i}<p-1$，因此在 p 的简化剩余系中一定有不适合 $x^{\frac{p-1}{q_i}}\equiv 1(\bmod p)$ 的 a_i 存在，令 $b_i=a_i^{\frac{p-1}{q_i^{k_i}}}$，下证 b_i 关于模 p 的阶数 $\lambda_i=q_i^{k_i}$，因为 $b_i^{q_i^{k_i}}=(a_i^{\frac{p-1}{q_i^{k_i}}})^{q_i^{l_i}}=(a_i^{\frac{p-1}{q_i^{k_i-l_i}}})\equiv 1(\bmod p)$，所以 $\lambda_i\mid q_i^{k_i}$，即 $\lambda_i=q_i^{l_i}$，$l_i<k_i$，又 $b_i^{\lambda_i}\equiv 1(\bmod p)$，从而 $(a_i^{\frac{p-1}{q_i^{k_i}}})^{\lambda_i}=(a_i^{\frac{p-1}{q_i^{k_i}}})^{q_i^{l_i}}=(a_i^{\frac{p-1}{q_i^{k_i-l_i}}})\equiv 1(\bmod p)$，于是 $a_i^{\frac{p-1}{q_i}}\equiv 1(\bmod p)$，与假设矛盾，因此，$b_i$ 关于模 p 的阶数 $\lambda_i=q_i^{k_i}$，即 q 是模 p 的原根。当 $k\geqslant 2$ 时，假设 g 是模 p 的原根，即 $g^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$，于是 $g^{p-1}\not\equiv 1(\bmod p^2)$，或者 $g^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$。

下证，若 $g^{p-1}\not\equiv 1(\bmod p^2)$，$g$ 是 p^k 的原根，若 $g^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$，$g+p$ 是 p^k 的原根。事实上，当 $g^{p-1}\not\equiv 1(\bmod p^2)$ 时，假定关于模 p^k，g 的阶数是 λ，那么 $\lambda\mid\varphi(p^k)$，即 $\lambda\mid p^{k-1}(p-1)$，令 $\lambda_s=p^{k-1}(p-1)$，因为 $p^k\equiv 1(\bmod p^k)$，所以 $g^\lambda\equiv 1(\bmod p)$，于是 $(p-1)\mid\lambda$，即 $\lambda=(p-1)t$，因此 $p^{k-1}=ts$，也就是说，$t=p^e$，$e\leqslant k-1$，所以 $\lambda=p^e(p-1)$，假如 $e<k-1$，那么 $e+2<k$，于是 $g^\lambda\equiv 1(\bmod p^{e+2})$，但是 $g^\lambda=g^{p^e(p-1)}=(g^{p-1})^{p^e}=(1+hp)^{p^e}\equiv 1+hp^{e+1}(\bmod p^{e+2})$，所以 $hp^{e+1}\equiv 0(\bmod p^{e+2})$，因此 $h\equiv 0(\bmod p)$，它与 $ph\not\equiv 0(\bmod p^2)$ 的假设不符，于是 $e=k-1$，$\lambda=p^{k-1}(p-1)$，也就是说，当 $g^{p-1}\not\equiv 1(\bmod p^2)$ 时，q 是模 p^k 的原根。

当 $g^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$，因为 $g+p$ 是模 p^k 的原根，这时 $(g+p)^{p-1}-1\equiv g^{p-1}-1+p(p-1)g^{p-2}\equiv p(p-1)g^{p-2}(\bmod p^2)$，又因为 $(g,p)=1$，所以 $(g+p)^{p-1}\not\equiv 1(\bmod p^2)$，利用前面的证明过程可得，若 $g^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$，则 $g+p$ 是 p^k 的原根。

3）若 $m=2p^k$，此时 $\varphi(m)=\varphi(2)\varphi(p^k)$，$g$ 是模 p^k 的原根，那么，当 g 为奇数时，g 是模 m 的原根，这是因为 $(g,m)=1$，$g^{\varphi(m)}\equiv 1(\bmod m)$，假设 g 关于模 m 的阶数 $\lambda<\varphi(m)$，则从 $g^\lambda\equiv 1(\bmod m)$，即有 $g^\lambda\equiv 1(\bmod p^k)$，而这与 g 是模 p^k 的原根的假设矛盾，因此 $\lambda=\varphi(m)$，于是 g 是模 m 的原根。当 g 为偶数时，因为 $g+p^k$ 是 p^k 的原根，而 $g+p^k$ 为奇数，所以 $g+p^k$ 也是模 m 的原根。

于是完成了引理的证明。

2 结论及证明

定理 1 方程 $\sum_{k=1}^{n}Z(k)=\frac{n(n+1)}{2}$ 的解为且只能为 $n=1,3$。

证明 当 $n\geqslant 64$ 时，有 $\sum_{k=1}^{n}Z(k)<\frac{n(n+1)}{2}$。

事实上，当 $n\geqslant 64$ 时，设 $u=\left[\frac{n+1}{2}\right]$，注意到 $Z(2k+1)\leqslant 2k$，由引理 2 有

$$\sum_{k\leqslant n}Z(k)=\sum_{k\leqslant n}Z(2k-1)+\sum_{k\leqslant\frac{n}{2}}Z(2k)\leqslant 1+\sum_{2\leqslant k\leqslant n}(2k-2)+\frac{15n^2}{64}+\frac{9n}{4}+\frac{45}{4}$$

$$\leqslant\frac{31n^2}{64}+\frac{5n}{4}+\frac{49}{4}<\frac{n(n+1)}{2}。$$

所以，当 $n \geqslant 64$ 时，有不等式 $\sum_{k=1}^{n} Z(k) < \frac{n(n+1)}{2}$，因此，当 $n \geqslant 64$ 时，方程 $\sum_{k=1}^{n} Z(k) = \frac{n(n+1)}{2}$ 没有正整数解。当 $n < 64$ 时，由引理 3 及参考文献 [8] 可得，$n = 1$ 及 $n = 3$ 是方程 $\sum_{k=1}^{n} Z(k) = \frac{n(n+1)}{2}$ 的解。

定理 2　设 n 是存在原根的正整数，则伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 为 n 的原根当且仅当 $n = 2,3,4$。

证明　显然，$Z(2) = 3$ 是 2 的一个原根，$Z(4) = 7$ 是 4 的一个原根，现在考虑 $n = p^{\alpha}$，其中：p 为奇素数。若 $Z(n)$ 是模 $n = p^{\alpha}$ 的原根。则由 $Z(n)$ 的定义及性质知 $Z(n) = p^{\alpha} - 1$，所以 $p^{\alpha} - 1$ 为模 $n = p^{\alpha}$ 的原根。又由于 $Z^2(n) = (p^{a} - 1)^2 \equiv 1(\bmod p^{a})$ 且 $p^{\alpha} - 1$ 为模 $n = p^{\alpha}$ 的原根，所以 $2 = \varphi(p^{\alpha}) = p^{a-1}(p-1)$，由此式立刻推出 $\alpha = 1, p - 1 = 2$。即就是 $p = 2 + 1 = 3$。因此，当 $n = p^{\alpha}$（p 为奇素数）时，$Z(n)$ 为 n 的原根当且仅当 $n = p = 3$。

当 $n = 2p^{\alpha}$ 时，注意到前面列出 $Z(n)$ 的性质，我们分两种情况讨论：

(1) 若 $p^{\alpha} \equiv 3(\bmod 4)$，则由 $Z(n)$ 的定义及性质可得 $Z(n) = p^{\alpha}$，因为 $(p^{\alpha}, 2p^{\alpha}) = p^{\alpha} > 1$，所以 $Z(n) = p^{\alpha}$ 不可能为 $n = 2p^{\alpha}$ 的原根。

(2) 若 $p^{\alpha} \equiv 1(\bmod 4)$，则由 $Z(n)$ 的定义及性质可得 $Z(n) = p^{\alpha} - 1$。因为 $(p^{\alpha} - 1, 2p^{\alpha}) = 2 > 1$，所以 $Z(n) = p^{\alpha} - 1$ 也不可能为 $n = 2p^{\alpha}$ 的原根。

综合以上结果及引理 4、引理 5 可得，$Z(n)$ 为 n 的原根当且仅当 $n = 2,3,4$。

参考文献：

[1] Smaradache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 2001.

[2] Gorski D. The pseudo-Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-145.

[3] LIU Yah-hi. On the Smarandache Pseudo Number Sequenc [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2006, 21(4): 581-584.

[4] WANG Jinrui. On the Smarandache function and the Fermat number [J]. Scienfia Magna, 2008, 4(2): 25-28.

[5] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2008.

[6] 张爱玲. 关于伪 Smarandache 函数的一个方程及其正整数解 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2008, 38(4): 535-538.

[7] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[8] 朱敏慧. 关于 Smarandache 函数与费尔马数 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2010, 40(4): 583-585.

【责任编辑　牛怀岗】

The Solution of Equations Involving Pseudo Smarandache Functions

YANG Ming-shun

(School of Mathematics and Physics, Weinan Normal University, Weinan 714099, China)

Abstract: In this paper, the elementary and analytic methods are used to study the solvability of two classes of equations involving pseudo Smarandache function $\mathbf{Z}(n)$. It is proved that if and only if $n = 2,3,4$, the pseudo Smarandache function $\mathbf{Z}(n)$ is primitive root of n, Moreover, only two positive integer solutions of equation $\sum_{k-1}^{n} \mathbf{Z}(k) = \frac{n(n+1)}{2}$ is obtained.

Key words: pseudo function; primitive root; equation; positive integer solution

